

## Voraussetzungen für den Mathezirkel

Der Mathezirkel richtet sich primär an Schülerinnen und Schüler der Oberstufe, aber wir setzen nur die Mathematikkenntnisse der Mittelstufe voraus und freuen uns sehr, wenn interessierte Schülerinnen und Schüler der Mittelstufe ebenfalls teilnehmen. Falls du in der Mittelstufe bist und Interesse hast, aber wegen der Vorkenntnisse noch unsicher bist, melde dich doch einfach an und probiere es aus!

## Anmeldung und Teilnahme

Zur Teilnahme am 11.11.2023 bzw. am 02.12.2023 bzw. am 27.01.2024 **melde dich bitte** mit dem **Anmeldeformular** von der Webseite **bis spätestens zum 07.11.2023 bzw. 28.11.2023 bzw. 23.01.2024 verbindlich** per E-Mail bei Frau Britta Borchert an (E-Mail: [britta.borchert@math.upb.de](mailto:britta.borchert@math.upb.de)). Sofern du **nicht volljährig** bist, sollten deine Eltern das Anmeldeformular ebenfalls unterschreiben.<sup>1</sup> Natürlich kannst du dich mit dem Anmeldeformular direkt für alle drei Mathezirkel-Treffen zusammen anmelden.

## Teilnahmebescheinigungen

Bei jedem virtuellen Mathezirkel-Treffen wird eine Teilnehmerliste geführt, und nach dem letzten Termin dieser Runde erhalten alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer eine **Teilnahmebescheinigung**, auf der die Themen der besuchten Mathezirkel-Treffen aufgelistet sind.<sup>2</sup> Wenn du eine Teilnahmebescheinigung erhalten möchtest, melde dich beim Zugang zur Videokonferenz-Software BigBlueButton bitte mit „Vorname Nachname“ an.

<sup>1</sup>Hinweis: Bitte beachte, dass Gefährdungen der Vertraulichkeit und der unbefugte Zugriff Dritter bei einer Kommunikation per unverschlüsselter E-Mail nicht ausgeschlossen werden können. Sofern gewünscht, kannst du Dokumente, die du uns per E-Mail zusendest, durch ein Passwort schützen (z.B. durch 7-ZIP) und uns das Passwort auf anderem Wege (z.B. per Telefon) mitteilen. Auf Wunsch kannst du uns das Anmeldeformular auch per Post zusenden.

<sup>2</sup>Dokumente, wie Teilnahmebescheinigungen, schicken wir auf Wunsch und nach Rücksprache auch verschlüsselt oder postalisch zu. Für den Fall, dass du uns dafür deine Postadresse mitteilst, wird diese nach dem Versand unverzüglich gelöscht.

## Virtuelle/Online Mathezirkel-Treffen mit der Videokonferenz-Software BigBlueButton

Alle Mathezirkel-Treffen finden **virtuell/online** statt. Die **Materialien** und die **Zugangsdaten** zu der Videokonferenz-Software BigBlueButton werden normalerweise am **Mittwoch vor dem jeweiligen Mathezirkel-Treffen** per E-Mail verschickt. Solltest du trotz Anmeldung zu einem Treffen bis einschließlich Donnerstag davor keine E-Mail bekommen haben, weil etwas mit der E-Mail-Kommunikation schiefgegangen ist, so melde dich bitte bei: [kerstin.hesse@math.upb.de](mailto:kerstin.hesse@math.upb.de)

Der Online-Zugang zu der Videokonferenz-Software **BigBlueButton** erfolgt über den Webbrowser (vorzugsweise: Chrome; ungünstig: Safari, Opera), so dass keine spezielle Software erforderlich ist.

## Kontakt und Webseite

Scanne diesen Barcode, um zur **Mathezirkel-Webseite** mit den aktuellen Terminen zu kommen:  
[math.uni-paderborn.de/mathezirkel/](http://math.uni-paderborn.de/mathezirkel/)



## Leitung des Paderborner Mathezirkels:

AOR Dr. Kerstin Hesse  
Universität Paderborn  
Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik  
Institut für Mathematik  
Warburger Straße 100  
33098 Paderborn

Büro: Gebäude D, Raum D1.217  
Tel.: 05251 60-2605  
E-Mail: [kerstin.hesse@math.upb.de](mailto:kerstin.hesse@math.upb.de)



Paderborn, August 2023

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Mathematiker schwärmen von der Schönheit der Mathematik. Sie sind begeistert von eleganten Beweisen und der Logik und klaren Sprache der Mathematik.

Mathematik bereitet vielen Personen Schwierigkeiten; erst wenn sie verstanden ist, wird ihre Eleganz, Schönheit und Einfachheit sichtbar.

Mathematik ist spannend, überraschend und wunderschön und kann fast jedem großes Vergnügen bereiten.

Das Ziel des **Paderborner Mathezirkels** ist es, dir diese Schönheit und Eleganz der Mathematik zu vermitteln.

Der Mathezirkel trifft sich im Herbst und Winter 2023/24 **virtuell/online** an den folgenden ausgewählten Samstagsterminen: am **11.11.2023**, am **02.12.2023** und am **27.01.2024**, jeweils **von 10:00 bis 13:00 Uhr**. Die spannenden Themen lauten „Inkreis, Umkreis und Satz des Thales“, „Induktion und andere Beweistechniken“ und „Kongruenz modulo  $n$ “ (Details siehe rechts).

Für den Mathezirkel werden nur die Mathematikkenntnisse der Mittelstufe vorausgesetzt. Der Mathezirkel richtet sich damit primär an Schülerinnen und Schüler der Oberstufe, aber wir freuen uns sehr, wenn interessierte Schülerinnen und Schüler der Mittelstufe ebenfalls teilnehmen.

Zur Teilnahme an einem Mathezirkel-Treffen melde dich bitte mit dem **Anmeldeformular** von der Webseite bis spätestens am Dienstag vor dem jeweiligen Treffen verbindlich per E-Mail bei Frau Britta Borchert an (E-Mail-Adresse: [britta.borchert@math.upb.de](mailto:britta.borchert@math.upb.de)). Bei Fragen zum Mathezirkel schicke mir bitte einfach eine E-Mail an die folgende E-Mail-Adresse: [kerstin.hesse@math.upb.de](mailto:kerstin.hesse@math.upb.de)

Ich freue mich sehr, wenn du am Mathezirkel des Instituts für Mathematik der Universität Paderborn teilnimmst!

Mit herzlichen Grüßen



Dr. Kerstin Hesse  
(Akademische Oberrätin, Leitung des Mathezirkels)

## Wo und wann findet der Mathezirkel statt?

**Termine:** Der Mathezirkel findet im Herbst und Winter 2023/24 **virtuell/online** an den folgenden ausgewählten Samstagsterminen statt: am 11.11.2023, am 02.12.2023 und am 27.01.2024, jeweils von 10:00 bis 13:00 Uhr. Die Mathezirkel-Treffen bauen inhaltlich nicht aufeinander auf.

**Zugangsdaten und Materialien:** Die Materialien und die Zugangsdaten zu den einzelnen Online-Treffen (mit der Videokonferenz-Software BigBlueButton) werden normalerweise am Mittwoch vor dem jeweiligen Mathezirkel-Treffen per E-Mail verschickt.

### Programm am 11.11.2023

#### Inkreis, Umkreis und Satz des Thales

Leiterin des Workshops: Dr. Kerstin Hesse

**Beschreibung:** Die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt des Inkreises, und die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt des Umkreises. Aber warum ist das eigentlich so, d.h. wie beweist man diese Sätze der Trigonometrie? Und wie beweist man den Satz des Thales für rechtwinklige Dreiecke? – Neben diesen oft aus der Schule bekannten Sätzen werden wir gemeinsam mit Anleitung auch noch weitere weniger bekannte Sätze der Trigonometrie beweisen, z.B. eine Verallgemeinerung des Satzes des Thales für beliebige Dreiecke oder die Flächengleichheit der Dreiecke in der Vecten-Figur. – Sinus und Cosinus werden in diesem Mathezirkel-Treffen nicht benötigt.

### Programm am 02.12.2023

#### Induktion und andere Beweistechniken

Leiterin des Workshops: Dr. Kerstin Hesse

**Beschreibung:** In dem Film „Die Vermessung der Welt“ verblüfft Carl Friedrich Gauß als junger Schüler seinen Mathematiklehrer, indem er innerhalb weniger Minuten die Zahlen von 1 bis 100 mit einem Beweistrick berechnet, der direkt die Formel  $\frac{1}{2}n(n+1)$  für die Summe der na-

türlichen Zahlen von 1 bis  $n$  liefert. Diese Formel ist ein typisches Beispiel für eine Aussage, die man einerseits mit dem Prinzip der vollständigen Induktion aber andererseits auch direkt (mit dem von Gauß verwendeten Trick) beweisen kann. Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion (einer sehr wichtigen Beweistechnik) werden wir aber nicht nur Formeln für Summen, sondern auch Ungleichungen und Aussagen über Teilbarkeit beweisen. Mit vollständiger Induktion können wir sogar beweisen, dass sich alle natürlichen Zahlen  $n \geq 12$  als Summe von Vieren und Fünfen darstellen lassen. Die meisten in diesem Mathezirkel-Treffen untersuchten Aussagen werden wir nicht nur mit vollständiger Induktion, sondern auch mit einem direkten Beweis nachweisen.

### Programm am 27.01.2024

#### Kongruenz modulo $n$

Leiterin des Workshops: Dr. Kerstin Hesse

**Beschreibung:** Zwei ganze Zahlen  $a$  und  $b$  heißen „kongruent modulo  $n$ “, wenn die Division mit Rest durch  $n$  für beide Zahlen den gleichen Rest liefert. Beispielsweise sind 13 und 28 kongruent modulo 5, weil  $13 = 2 \cdot 5 + 3$  und  $28 = 5 \cdot 5 + 3$  gelten, also weil beide bei Division mit Rest durch 5 den Rest 3 haben. Wir werden lernen, dass man in geeigneten Kontexten „kongruent modulo  $n$  rechnen“ kann und dass man damit gewisse mathematisch sonst schwer beweisbare Aussagen sehr elegant beweisen kann. Beispielsweise kann man damit die alternierende Quersummenregel für Teilbarkeit durch 11 einfach beweisen, oder die Aussage, dass für jede ungerade natürliche Zahl  $n \geq 3$  die Zahl  $1^n + 2^n + 3^n + \dots + (n-1)^n$  durch  $n$  teilbar ist. Als Vorbereitung auf das kongruent modulo  $n$  Rechnen werden wir einfache Beweise im Kontext von Teilbarkeit, Division mit Rest und Kongruenz modulo  $n$  selber durchführen.